Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $N=\log_2 24-\log_2 12+3$ este pătratul unui număr natural.

5p **2.** Determinați numărul real a pentru care punctul $A\left(a,a^2\right)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-2x-2}=x-2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1!, 2!, 3!, ..., 10!\}$, acesta să fie divizibil cu 9.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC și punctul D mijlocul segmentului BC. Arătați că, pentru orice puncte E și F astfel încât $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FD}$, are loc relația $2\left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Arătați că $(\sin x+\cos x)^2-(\sin x-\cos x)^2=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ x-1 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(-1)\right)=3$.

5p **b)** Demonstrați că matricea $A(x)$ este inversabilă, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(1)\cdot X\cdot A(1)=A(2)$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă şi cu element neutru $x\circ y=xy-\sqrt{2}(x+y-1)+2$.

5p **a)** Arătați că $\sqrt{2}\circ 0=\sqrt{2}$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $\left(x-\sqrt{2}\right)\circ\left(x+\sqrt{2}\right)=x$.

5p **c)** Determinați numerele raționale al căror simetric în raport cu legea de compoziție „$\circ$” este număr rațional.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(x)=x\left(1-\frac{1}{x}\ln\left(x^2+1\right)\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați numărul natural nenul n, știind că tangenta la graficul funcției f în punctul $A\left(n,f(n)\right)$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=\frac{1}{5}x+1$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^3}-\frac{2\ln x}{x^3}$ și funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{\ln x}{x^2}$, o primitivă a lui f.

5p **a)** Arătați că $\int_1^e x^2\left(f(x)+\frac{2\ln x}{x^3}\right)dx=1$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^{\sqrt{5}} x\cdot f\left(x^2+3\right)dx=-\frac{5\ln 2}{128}$.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care $\int_e^{e^2} x\cdot F(x)\,dx=\frac{a^2-1}{2}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$N=\log_2\frac{24}{12}+3=\log_2 2+3=$	**3p**
	$=1+3=4=2^2$	**2p**
2.	$f(a)=a^2 \Leftrightarrow a^2-2a+1=0$	**3p**
	$a=1$	**2p**
3.	$x^2-2x-2=(x-2)^2 \Rightarrow x^2-2x-2=x^2-4x+4$	**3p**
	$x=3$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Numerele divizibile cu 9 din mulțimea A sunt $6!$, $7!$, $8!$, $9!$ și $10!$, deci sunt 5 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{1}{2}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$	**2p**
	$2\left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}\right)=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$	**3p**
6.	$(\sin x+\cos x)^2-(\sin x-\cos x)^2=4\sin x\cos x=$	**2p**
	$=2\sin 2x=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(-1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(-1))=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1\cdot 1-1\cdot(-2)=3$	**3p**
b)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}x^2 & 1\\ x-1 & 1\end{vmatrix}=x^2-x+1$, pentru orice număr real x	**3p**
	Cum $\det(A(x))\neq 0$ pentru orice număr real x, obținem că matricea $A(x)$ este inversabilă pentru orice număr real x	**2p**
c)	$A(1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow (A(1))^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	**2p**
	Cum $A(2)=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ și $X=(A(1))^{-1}\cdot A(2)\cdot(A(1))^{-1}$, obținem $X=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$\sqrt{2}\circ 0=\sqrt{2}\cdot 0-\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+0-1\right)+2=$	**3p**
	$=-2+\sqrt{2}+2=\sqrt{2}$	**2p**

b)	$x^2-2-\sqrt{2}\left(x-\sqrt{2}+x+\sqrt{2}-1\right)+2=x \Leftrightarrow x^2-\left(2\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}=0$	**3p**
	$x=\sqrt{2}-1$ sau $x=\sqrt{2}+2$	**2p**
c)	$e=\sqrt{2}+1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”, deci a este simetrizabil în raport cu „$\circ$” dacă și numai dacă există a', astfel încât $a\circ a'=a'\circ a=\sqrt{2}+1$	**2p**
	$aa'-\sqrt{2}\left(a+a'-1\right)+2=\sqrt{2}+1 \Leftrightarrow aa'+1-\sqrt{2}\left(a+a'\right)=0$ deci, dacă a și a' sunt numere raționale, obținem $a+a'=0$ și $aa'=-1$, deci $a=-1$ sau $a=1$, care convin	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(x-\ln\left(x^2+1\right)\right)'=1-\dfrac{1}{x^2+1}\cdot 2x=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul A este paralelă cu dreapta de ecuație $y=\dfrac{1}{5}x+1$, deci $f'(n)=\dfrac{1}{5}$	**3p**
	$5(n-1)^2=n^2+1 \Leftrightarrow 2n^2-5n+2=0$ și, cum n este număr natural nenul, obținem $n=2$	**2p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in(0,1)\Rightarrow f$ strict crescătoare pe $(0,1)$, $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ strict crescătoare pe $(1,+\infty)$ și, cum f este continuă în $x=1$, obținem că f este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$, deci injectivă	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și f este continuă și strict crescătoare pe $(0,+\infty)$, obținem că f este surjectivă, deci bijectivă	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_1^e x^2\left(f(x)+\frac{2\ln x}{x^3}\right)dx=\int_1^e \frac{1}{x}\,dx=\ln x\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\ln e-\ln 1=1$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_1^{\sqrt{5}} x\cdot f\left(x^2+3\right)dx=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{5}}\left(x^2+3\right)'\cdot f\left(x^2+3\right)dx=\frac{1}{2}F\left(x^2+3\right)\Big\vert_1^{\sqrt{5}}=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln 8}{64}-\dfrac{\ln 4}{16}\right)=-\dfrac{5\ln 2}{128}$	**2p**
c)	$\displaystyle\int_e^{e^2} xF(x)\,dx=\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx=\frac{\ln^2 x}{2}\Big\vert_e^{e^2}=\frac{\ln^2\left(e^2\right)-\ln^2 e}{2}=\frac{3}{2}$	**3p**
	$\dfrac{a^2-1}{2}=\dfrac{3}{2}$, de unde obținem $a=-2$ sau $a=2$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați termenul b_4 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\ge 1}$, știind că $b_1=\sqrt{2}$ și $b_2=4$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-2x+1$, unde m este număr real nenul. Determinați numărul real nenul m pentru care axa Ox este tangentă graficului funcției f.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+2}-3^x-6\cdot 3^{x-1}=6$.
5p	**4.** Se consideră mulțimea A, a numerelor naturale de două cifre. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea A, numărul $2n-60$ să aparțină mulțimii A.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,4)$, $B(5,2)$ și C, mijlocul segmentului AB. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul C și este perpendiculară pe dreapta AB.
5p	**6.** Se consideră triunghiul isoscel ABC, cu măsura unghiului A egală cu $120°$ și $AB=6$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $9\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ și $B(x)=xI_2+iA$, unde x este număr real și $i^2=-1$.
5p	**a)** Arătați că $\det A=1$.
5p	**b)** Determinați numărul real x pentru care $B(3)\cdot B(5)=8B(x)$.
5p	**c)** Determinați perechile (m,n) de numere întregi pentru care matricea $B(m)+iB(n)$ **nu** este inversabilă.
	2. Pe mulțimea $M=[1,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=xy-\sqrt{(x-1)(y-1)}$.
5p	**a)** Arătați că $2*5=8$.
5p	**b)** Arătați că $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.
5p	**c)** Demonstrați că $(nx)*y\ge x(n*y)$, pentru orice $x,y\in M$ și orice număr natural n, $n\ge 2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{6(1-x^2)}{\sqrt{x}(x^2+3)^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați $a\in(0,+\infty)$, știind că tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a,f(a))$ este paralelă cu axa Ox.
5p	**c)** Demonstrați că $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+3}>\dfrac{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}{x^2+\frac{1}{x^2}+5}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x+2x}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 e^x f(x)\,dx=e$.

5p **b)** Arătați că $\int_{-1}^0 f(x)\,dx=-1$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_0^1 F(x)f''(x)\,dx=\dfrac{a(e+1)}{e^2}$, unde $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este primitiva funcției f cu proprietatea $F(0)=0$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$q=\frac{b_2}{b_1}=2\sqrt{2}$, unde q este rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$	**2p**
	$b_4=b_1q^3=\sqrt{2}\cdot\left(2\sqrt{2}\right)^3=32$	**3p**
2.	Axa Ox este tangentă graficului funcției $f \Leftrightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow 4-4m=0$	**3p**
	$m=1$	**2p**
3.	$3^{x-1}\left(3^3-3-6\right)=6 \Leftrightarrow 3^{x-1}\cdot 18=6 \Leftrightarrow 3^{x-1}=\frac{1}{3}$	**3p**
	$x-1=-1$, deci $x=0$	**2p**
4.	Mulțimea A are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numărul $2n-60$ aparține mulțimii A dacă $10\leq 2n-60\leq 99$, deci sunt 45 de cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{45}{90}=\frac{1}{2}$	**3p**
5.	$m_{AB}=-\frac{1}{3}$ și, cum $d\perp AB$, obținem $m_d=3$	**2p**
	$C(2,3)$ și, cum $C\in d$, obținem că ecuația dreptei d este $y-3=3(x-2)$, adică $y=3x-3$	**3p**
6.	$AC=AB=6$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC\cdot\sin 120^\circ}{2}=\frac{6\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=9\sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=0\cdot 0-1\cdot(-1)=$	**3p**
	$=0+1=1$	**2p**
b)	$B(3)\cdot B(5)=(3I_2+iA)(5I_2+iA)=15I_2+8iA+i^2A\cdot A=16I_2+8iA=$	**3p**
	$=8(2I_2+iA)=8B(2)$, deci $x=2$	**2p**
c)	$B(m)+iB(n)=\begin{pmatrix}m+in & i-1\\ -i+1 & m+in\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(B(m)+iB(n)\right)=(m+in)^2-2i$, unde $m,\ n\in\mathbb{Z}$	**2p**
	$B(m)+iB(n)$ nu este inversabilă, deci $\det\left(B(m)+iB(n)\right)=0\Rightarrow m^2-n^2+2(mn-1)i=0$ și, cum m și n sunt numere întregi, obținem perechile $(-1,-1)$ și $(1,1)$	**3p**
2.a)	$2*5=2\cdot 5-\sqrt{(2-1)(5-1)}=$	**3p**
	$=10-\sqrt{4}=8$	**2p**

b)	$x*1=x\cdot 1-\sqrt{(x-1)(1-1)}=x$, pentru orice $x\in M$	**2p**
	$1*x=1\cdot x-\sqrt{(1-1)(x-1)}=x$, pentru orice $x\in M$, deci $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p**
c)	$((nx)*y)-x(n*y)=x\sqrt{(n-1)(y-1)}-\sqrt{(nx-1)(y-1)}=\sqrt{y-1}\cdot\dfrac{(x-1)(nx-x-1)}{x\sqrt{n-1}+\sqrt{nx-1}}$, pentru $x,y\in M$ și $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$	**2p**
	Cum $nx-x-1=x(n-1)-1$ și $x\geq 1$, n este număr natural, $n\geq 2$, obținem $nx-x-1\geq 0$, deci $(nx)*y\geq x(n*y)$, pentru orice $x,y\in M$ și orice număr natural n, $n\geq 2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\frac{2}{\sqrt{x}}\cdot(x^2+3)-4\sqrt{x}\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{2x^2+6-8x^2}{\sqrt{x}(x^2+3)^2}=\dfrac{6(1-x^2)}{\sqrt{x}(x^2+3)^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a,f(a))$ este paralelă cu axa $Ox \Leftrightarrow f'(a)=0$, deci $1-a^2=0$	**3p**
	Cum $a\in(0,+\infty)$, obținem $a=1$	**2p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(1,+\infty)$	**2p**
	$1<x<x+\dfrac{1}{x}\Rightarrow f(x)>f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$, deci $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+3}>\dfrac{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}{x^2+\frac{1}{x^2}+5}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1 e^x f(x)\,dx=\int_0^1(e^x+2x)\,dx=(e^x+x^2)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=e+1-1=e$	**2p**
b)	$\int_{-1}^0 f(x)\,dx=\int_{-1}^0\left(1+2xe^{-x}\right)dx=\left(x-2(x+1)e^{-x}\right)\Big\vert_{-1}^0=$	**3p**
	$=-2-(-1)=-1$	**2p**
c)	$F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci $\int_0^1 F(x)f''(x)dx=F(x)f'(x)\Big\vert_0^1-\dfrac{f^2(x)}{2}\Big\vert_0^1=$ $=F(1)f'(1)-F(0)f'(0)-\dfrac{f^2(1)-f^2(0)}{2}$	**3p**
	$f'(x)=2(1-x)e^{-x}$, deci $f'(1)=0$ și, cum $F(0)=0$, obținem $\int_0^1 F(x)f''(x)dx=\dfrac{-2(e+1)}{e^2}$, deci $a=-2$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\left(2+\sqrt{2}\right)=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-4x$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x-3}=\frac{1}{2^{2x}}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 11.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,0)$, $B(0,3)$ și $C(4,0)$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

5p **6.** Se consideră $E(x)=\operatorname{tg}x+\sin\frac{3x}{2}-2\cos\frac{x}{2}$, unde $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $M(x)=\begin{pmatrix}x+1 & -x\\ -2x & 2x+1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(M(1)\right)=4$.

5p **b)** Arătați că $M(x)\cdot M(1)=M(4x+1)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $M(x)\cdot M(1)\cdot M(1)=M(x+2)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=5xy+10x+10y+18$.

5p **a)** Arătați că $(-1)\circ 0=8$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=5(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul întreg m pentru care $m\circ m=m$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}+\ln(x-1)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x^2-x-2}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{x^2+1}{x-1}+\ln(x-1)\geq 5$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+4}{6x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 f(x)\left(6x^2+1\right)dx=10$.

5p	**b)** Arătați că $\int_0^2 \left(f(x) - \frac{4}{6x^2+1} \right) dx = \frac{\ln 5}{6}$.
5p	**c)** Determinați numărul real m pentru care $\int_0^1 \frac{x+4}{f(x)} \cdot e^{2x} dx = m\left(e^2 - 1\right)$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\left(2+\sqrt{2}\right)=\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)=$	**3p**
	$=4-2=2$	**2p**
2.	$f(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-4x=0$	**3p**
	$x=0$ sau $x=2$	**2p**
3.	$2^{x-3}=2^{-2x} \Leftrightarrow x-3=-2x$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 9 numere care sunt multipli de 11, deci sunt 9 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$	**3p**
5.	$AC=5$	**2p**
	$BC=\sqrt{4^2+3^2}=5$, deci $AC=BC$, de unde obținem că triunghiul ABC este isoscel	**3p**
6.	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**
	$E\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}+1-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(1)=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(M(1)\right)=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{vmatrix}=2\cdot 3-(-1)\cdot(-2)=$	**3p**
	$=6-2=4$	**2p**
b)	$M(x)\cdot M(1)=\begin{pmatrix}4x+2 & -4x-1\\ -8x-2 & 8x+3\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}(4x+1)+1 & -(4x+1)\\ -2(4x+1) & 2(4x+1)+1\end{pmatrix}=M(4x+1)$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$M(x)\cdot M(1)\cdot M(1)=\left(M(x)\cdot M(1)\right)\cdot M(1)=M(4x+1)\cdot M(1)=M(16x+5)$, pentru orice număr real x	**3p**
	$M(16x+5)=M(x+2)$, de unde obținem $16x+5=x+2$, deci $x=-\frac{1}{5}$	**2p**
2.a)	$(-1)\circ 0=5\cdot(-1)\cdot 0+10\cdot(-1)+10\cdot 0+18=$	**3p**
	$=-10+18=8$	**2p**
b)	$x\circ y=5xy+10x+10y+20-2=5x(y+2)+10(y+2)-2=$	**3p**
	$=(5x+10)(y+2)-2=5(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

c)	$m\circ m=5(m+2)^2-2$, pentru orice număr întreg m	**2p**
	$5(m+2)^2-2=m\Rightarrow(m+2)(5m+9)=0$ și, cum m este număr întreg, obținem $m=-2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x-1}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2-2x-1+x-1}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-x-2}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$f(2)=5$, $f'(2)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(2)=f'(2)(x-2)$, adică $y=5$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=2$; pentru $x\in(1,2]\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $(1,2]$ și pentru $x\in[2,+\infty)\Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**3p**
	$f(x)\ge f(2)$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, de unde obținem $\dfrac{x^2+1}{x-1}+\ln(x-1)\ge 5$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^2 f(x)(6x^2+1)dx=\int_0^2(x+4)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+4x\right)\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=2+8=10$	**2p**
b)	$\int_0^2\left(f(x)-\dfrac{4}{6x^2+1}\right)dx=\int_0^2\dfrac{x}{6x^2+1}dx=\dfrac{1}{12}\int_0^2\dfrac{(6x^2+1)'}{6x^2+1}dx=\dfrac{1}{12}\ln(6x^2+1)\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{12}\ln 25=\dfrac{\ln 5}{6}$	**2p**
c)	$\int_0^1\dfrac{x+4}{f(x)}\cdot e^{2x}dx=\int_0^1(6x^2+1)\cdot e^{2x}dx=\int_0^1(6x^2+1)\cdot\left(\dfrac{e^{2x}}{2}\right)'dx=(6x^2+1)\cdot\left(\dfrac{e^{2x}}{2}\right)\Big\vert_0^1-\int_0^1 6xe^{2x}dx=$ $=\dfrac{7e^2-1}{2}-3xe^{2x}\Big\vert_0^1+\dfrac{3e^{2x}}{2}\Big\vert_0^1=2e^2-2$	**3p**
	$2e^2-2=m(e^2-1)$, de unde obținem $m=2$	**2p**